微分方程式による現象記述と解きかた

土木工学：公共諸施設・構造物の有用目的にむけた合理的な実現をはかる方法（技術）
に関する学。

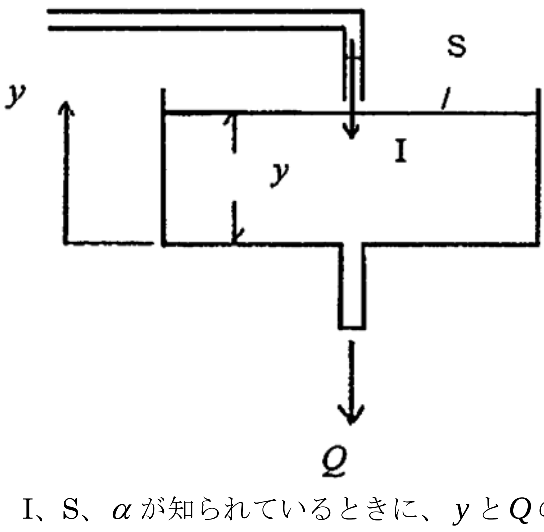
$\left(\begin{array}{l}\text{橋梁、トンネル、}\\ \text{ダム、道路}\\ \text{港湾、治水利水施設}\end{array}\right)$　$\left(\begin{array}{l}\text{安全化}\\ \text{利便化}\\ \text{快適化}\end{array}\right)$　$\left(\begin{array}{l}\text{合法則的}\\ \text{経済的}\end{array}\right)$

- 自然および人口素材によって作られた
  構造物の自然的な性質・作用（外力による応答）
- 社会的諸現象のうち、マスとしての移動・流通
- 諸施設・構造物の周辺への機能・影響（環境影響も含む）

の解明→（質量保存則、エネルギー則、運動量則、最適化）

一章　　１階常微分方程式

§１　　線形流出タンクを例にとった現象記述（質量保存則）



I は流入量（単位時間内に入り込む水の体積）
で時間的に一定
Q は流出量（単位時間内に出て行く水の体積）
で、$Q=\alpha y$ の関係にあるものとする。
α は係数で一定、y は水深、
S はタンクの平面面積

I、S、α が知られているときに、y と Q の時間変化を知りたい。
この現象を微分方程式として記述する。

（1）現象に関係する変数は何かを明らかにする。

このうち時空間に関する変数には　$\left\{\begin{array}{l}\text{差量　＝必ずしも座標軸を設けなくともよい}\\ \text{基準量＝座標軸を決定して明確に定義}\end{array}\right.$

・　時間的変化を知りたいのであるから、時間(刻) t を変数として導入する。

t は、他から一切の影響を受けない変数である　＝独立変数

流入開始の時間を原点として t を定義する　＝基準量

・　変化を見たいのは、水深 y と流出量 Q であり、こちらは時間(刻)の関数となるような変数である　＝従属変数

t における水深を $y(t)$、流出量を $Q(t)$ と表す。

水深はタンク底面高と水面高の差　＝差量

（2）現象の成り立ち

・　（ある時間中に入ってくる水の量）－（その時間中に出て行く水の量）

＝タンク内の水の増加量（または減少量）・・・（1）

（3）短い時間 δt というのを考え、この時間内で式（1）の関係を表す。

・　この時間内に入ってくる水の量　＝ $I \cdot \delta t$

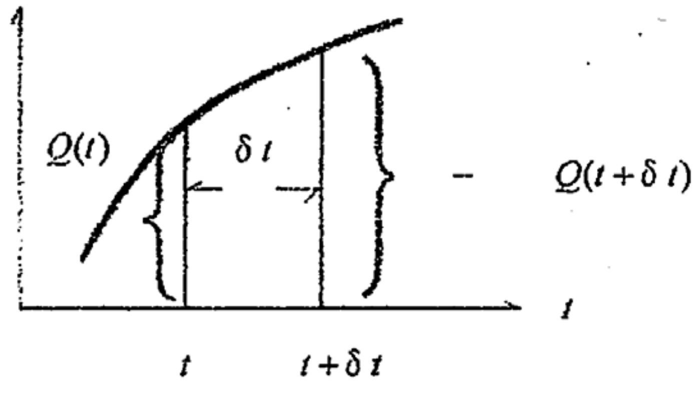
・　この時間内に出て行く水の量

$$= \frac{1}{2}\{Q(t) + Q(t+\delta t)\} \cdot \delta t$$

$$= \frac{1}{2}\{\alpha y(t) + \alpha y(t+\delta t)\} \cdot \delta t$$

$$= \frac{\alpha}{2}\{y(t) + y(t+\delta t)\} \cdot \delta t$$

Q は t とともに変化するので、



流出量は台形の面積とみなすことができ、上の式になる。

・　この時間中におけるタンク水量の変化

タンクの水量　＝S・y

タンクの水量増加分　＝S・$y(t+\delta t)$ −S・$y(t)$ ＝S・$\{y(t+\delta t) - y(t)\}$

これらより、$\mathrm{I} \cdot \delta t - \frac{\alpha}{2}\{y(t) + y(t+\delta t)\} \cdot \delta t$ ＝S・$\{y(t+\delta t) - y(t)\}$　・・・(2)

（4）Taylor 展開を利用して微分方程式を導く

Taylor 展開

$f(x)$ が x 軸上で定義された滑らかな関数（何回でも微分できる）で、a を変数、n を整数としたとき、

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\underbrace{\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}_{\downarrow\ R_n}\qquad \lim R_n=0$$

$$(\xi=a+\theta(x-a),\quad 0>\theta>1)$$

ここで、$x\Rightarrow x+\delta x,\quad a\Rightarrow x$ の置き換えを行うと、

$$f(x+\delta x)=f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)\delta x+\frac{1}{2!}f''(x)\delta x^2+\cdots\cdot$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\delta x^{(n-1)}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\delta x^{(n)}$$

この展開式を使って $y(t+\delta t)$ を表すと、

$$y(t+\delta t)=y(t)+\frac{1}{1!}y'(t)\delta t+\frac{1}{2!}y''(t)\delta t^2+\cdots\cdot$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}y^{(n-1)}(t)\delta t^{(n-1)}+\frac{1}{n!}y^{(n)}(\xi)\delta t^{(n)}$$

ここで、δt は微少量なので

$$y'(t)\delta t \quad >> \quad \frac{1}{2!}y''(t)\delta t^2 \quad >> \quad \frac{1}{3!}y'''(t)\delta t^3 \quad \cdots\cdot$$ である。

そこで、δt^2 以上の項（高次項）が δt の項と比較して微小のため無視できるものと考えると、

$$y(t+\delta t)\approx y(t)+\frac{dy(t)}{dt}\delta t$$ である。

これを式（2）に代入すると、

$$\mathrm{I}\cdot\delta t-\frac{\alpha}{2}\left\{y(t)+y(t)+\frac{dy(t)}{dt}\delta t\right\}\delta t=\mathrm{S}\cdot\left\{y(t)+\frac{dy(t)}{dt}\delta t-y(t)\right\}$$

両辺に δt がかかっているので、両辺を δｔ で割ると、

$$\mathrm{I}-\frac{\alpha}{2}\left\{2y(t)+\frac{dy(t)}{dt}\delta t\right\}=\mathrm{S}\frac{dy(t)}{dt}$$

この中で、$\dfrac{dy(t)}{dt}\delta t$ の項は、δt の一次の項であるが、δt の 0 次に相当する他の項に比較

すると１オーダー小さい項であり、$\delta t \to 0$ のもとで無視することができる。

こうすると、最終的な式は、　$\mathrm{I} - \alpha y = \mathrm{S} \cdot \dfrac{dy(t)}{dt}$　これを整理すると、

【水深変化を表す微分方程式】

$$\frac{dy}{dt} + \frac{\alpha}{S} y = \frac{I}{S}$$

《式の意味》

概念的な式（1）をより正確な定量的表現にしたのが式（3）である。

・左辺 $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\alpha}{S} y \equiv \left(\dfrac{d}{dt} + \dfrac{\alpha}{S} \right) y$ は外部信号に対する応答

・右辺はこの系に働く外部信号（外力）

未知数 y の微係数を含むこのような式を、微分方程式という。

式（3）は、１階の常微分から成り、微分係数にかかる係数Ａが定数なので、

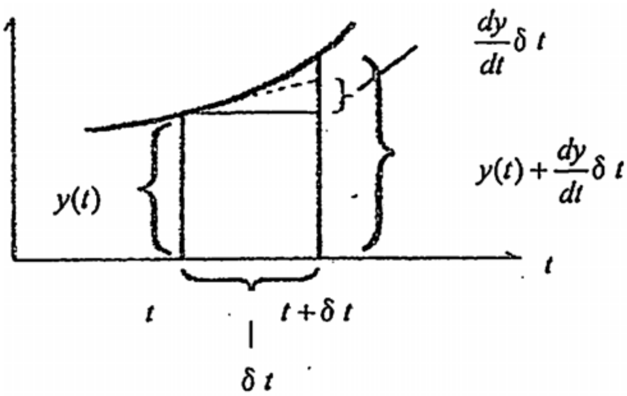
定係数１階常微分方程式　という。

〔重要〕

微分方程式をたてる上で必ず用いる方法として、

$y(t+\delta t) \approx y(t) + \dfrac{dy}{dt}\delta t$　の近似法がある。これは δt が小さい場合には、問題なく成立する。

今の問題のように、時刻 t から $t+\delta t$ の間の y の変化を表すには、



（5）初期条件

$y(t)$ がどう変化するかは、最初の状態（$t=0$）で、どれくらいの水深があったかによって違ってくる。$t=0$ における水深 $y(0)$ が分からなければ、その後の水深の変化を知ることができない。

時間変化問題における初めの状態を表す条件を、　初期条件　という。

今回の線形タンクの問題では、

$t=0$ の時，水深 $y(0)=y_0$

注）初期条件は、必ずしも $y(0)$ についてだけでなく、$y'(0)$ について与える場合もあり、問題ごとに十分考慮する必要がある。

（6）成立条件

式（3）は、どんな場合にでも成立するわけではない。

水深 y がタンク深さ D を越えては成り立たない。

すなわち、式（3）の成立条件は、$0 \le y \le D$

（水深 y がタンク深さ D を越えない）

これを越えると別な現象が生じる。

微分方程式が成り立つ範囲（適用限界）を明確化することが重要